transformada de Laplace. Notas 3

1) EDO con coeficientes constantes. La transformada de Laplace presenta gran utilidad para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Si se quiere resolver, digamos,

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha \frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t) \quad , \text{ es decir,}$$

$$Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t)$$

dónde α y β son constantes sometidas a ciertas condiciones

$$Y(0) = A \quad , \quad Y'(0) = B$$

dónde A y B son constantes dadas. tomando la transformada de Laplace a cada lado de (1) y usando (2), obtenemos una ecuación algebraica para determinar $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$. La solución requerida se obtiene al calcular la transformada inversa de Laplace de $y(s)$. Este método puede ser extendido a ED de orden superior.

2) EDO con coeficientes variables. La transformada de Laplace puede utilizarse también para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyos coeficientes son variables. Una ecuación especial en la cual el método resulta particularmente útil es aquella en la que cada uno de sus primeros

términos es de la forma $t^m y^{(n)}(t)$ cuya transformada de Laplace es

$$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\}$$

3) EDO simultáneas La transformada de Laplace puede usarse también para resolver dos o más ecuaciones diferenciales simultáneas. El procedimiento es esencialmente el mismo que el descrito anteriormente.

Importante

La transformada de Laplace tiene aplicaciones en la mecánica, en los circuitos eléctricos, en las leyes de Kirchhoff, en la construcción y diseño de vigas, en la EDP, entre otros.

Ejemplo 1

Resolver $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 5$

Solución.

tenemos

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \Rightarrow \mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{4e^{2t}\}$$

(aplicando transformada a ambos lados de la igualdad)

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

(prop. de linealidad)

$$\Rightarrow \{s^2 y - sY(0) - Y'(0)\} - 3\{sy - Y(0)\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

(por prop. transformada de derivadas, y por tabla de transformadas)

$$\Rightarrow \{s^2 y + 3s - 5\} - 3\{sy + 3\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

(por condiciones iniciales, $Y(0) = -3$, $Y'(0) = 5$)

$$\Rightarrow (s^2 - 3s + 2)y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

(conmutando y asociando)

Luego, despejando y tenemos

$$y = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s-2)} + \frac{14 - 3s}{s^2 - 3s + 2} = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

usando fracciones parciales

$$y = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

aplicando transformada inversa

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad Y = -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$